

Leçon 162 : Systèmes d'éq. lin. ; opérations élémentaires, aspects algo. et csq théoriques

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Las] : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur - Tome 1 et 2*, Patrick Lascaux

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

I Partie A - Les définitions [Gri] [Sch]

I.1 Définitions

■ **Déf 1 (Système linéaire) :**

■ **Déf 2 (Système compatible) :**

■ **Déf 3 (Rang d'un système) :**

■ **Prop 4 :** Le système est compatible si et seulement si B est dans l'image de A

■ **Ex 5 :** Faire un exemple simple triangulaire.

I.2 Structure de l'ensemble des solutions

■ **Déf 6 (Système homogène) :**

■ **Thm 7 (Structure de l'espace des solutions (homogène)) :**

■ **Thm 8 (Structure de l'espace des solutions (affine)) :**

■ **Ex 9 :** Voir [Gri].

I.3 Méthode de Cramer [Gri]

■ **Déf 10 (Système de Cramer) :**

■ **Thm 11 (Cramer) :**

■ **Rem 12 :** Complexité.

■ **Ex 13 :** Voir [Gri].

■ **Thm 14 (Rouché-Fontené) :**

■ **Ex 15 :** Voir [Gri].

II.4 Systèmes échelonnés

■ **Déf 16 (Matrice échelonnée / Système échelonné) :**

■ **Ex 17 :** Voir [Gri].

■ **Contre-Ex 18 :** En imaginer un.

■ **Prop 19 (Algo de remontée) :**

■ **Rem 20 :** Complexité.

II Partie B - Un algorithme théorique [Sch] [Gri] [Rom]

II.1 Pivot de Gauss

■ **Déf 21 (Matrices élémentaires) :**

■ **Rem 22 :** Lien entre opérations élémentaires et matrices élémentaires.

■ **Thm 23 (Pivot de Gauss) :**

■ **Rem 24 :** Complexité.

■ **App 25 (Générateurs de GL_n et SL_n) :**

■ **App 26 (Calcul d'inverses) :**

■ **Rem 27 :** Complexité.

II.2 Analogie dans les anneaux [Ber]

■ **Dév 28 (Forme normale de Smith) :**

■ **Rem 29 :** Vrai dans les anneaux principaux.

■ **Ex 30 :** Voir [Ber].

■ **App 31 :** Critère de solution (voir [Ber]), l'adapter comme Anaël.

■ **App 32 (Générateurs de GL_n et SL_n) :**

III Partie C - Décomposition de matrices

III.1 Décomposition LU [Rom]

■ **Déf 33 (Sous-matrices principales) :**

Ex 34 : Voir [Rom].

Thm 35 (Critère d'existence LU) :

Rem 36 : Lien avec le pivot.

Rem 37 : Complexité.

Ex 38 :

III.2 Décomposition de Cholesky [Sch] [Rom]

Thm 39 (Existence Cholesky) :

Ex 40 (Mise en pratique) :

Rem 41 : Complexité.

IV Partie D - Avec de l'analyse numérique, le choix de l'approximatif [Sch] [Las]

IV.1 Rappel d'analyse matricielle

Déf 42 (Rayon spectral) :

Thm 43 (Équivalence des convergences) :

Prop 44 (Gelfand) :

Déf 45 (Conditionnement) :

Prop 46 (Inégalité de conditionnement) :

Ex 47 (Matrice du Laplacien) :

IV.2 Méthodes itératives

Déf 48 : Soit $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La méthode itérative associée à cette décomposition est $Mx_{x+1} = Nx_k + b$ pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ex 49 : La méthode de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$ [Faire dessin pour D , E et F].

Ex 50 : La méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$.

Thm 51 : La méthode itérative $A = M - N$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $b \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Ex 52 : Exemple 2 p. 330 [Las]

Rem 53 : La convergence est alors géométrique, de facteur géométrique ρ .

 Dév 54 (Accélération de Tchebychev) :

Thm 55 (Convergence de Jacobi) :

Thm 56 (Convergence Relaxation) :